Test, dzień pierwszy, grupa młodsza

1. Załóżmy, że $x, y \neq 0$ spełniają równanie $x + \frac{2}{x} = y + \frac{2}{y}$. Wówczas:

.... iloczyn xy może być większy od 1,

.... iloczyn xy może być większy od $\sqrt{2}$,

.... iloczyn xy może być większy od 2.

Iloczyn ten wynosi dokładnie 2. Istotnie, mnożąc stronami przez xy dostajemy $x^2y+2y = xy^2+2x$, a zatem $xy(x-y) = 2(x-y)$. Skoro $x - y \neq 0$, to $xy = 2$.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

2. Pewien miesiąc ma 31 dni. W miesiącu tym poniedziałek i środa wypadają tyle samo razy. Wówczas:

.... miesiąc ten może zacząć się we wtorek lub w czwartek

.... miesiąc ten musi się zacząć w poniedziałek, wtorek lub środę

.... poniedziałek może wypaść 3., 6. lub 7 dnia miesiąca.

Jeden z pierwszych siedmiu dni miesiąca musi być poniedziałkiem. Jeśli poniedziałek jest pierwszym, drugim lub trzecim dniem miesiąca, to w miesiącu tym mamy 5 poniedziałków w dniach: (1-3, 8-10, 15-17, 22-24, 29-31). Aby także śród było także pięć w miesiącu potrzeba, aby miesiąc zaczynał się w poniedziałek. Dostajemy więc jeden sprzyjający układ: gdy poniedziałek wypada pierwszego dnia miesiąca. Załóżmy więc, że w miesiącu mamy cztery poniedziałki. Wówczas pierwszy z nich nie wypada wcześniej niż 4 dnia tego miesiąca. W ten sposób dostajemy dwa sprzyjające układy poniedziałków: 4, 11, 18, 25, gdzie środy są 6, 13, 20, 27 oraz układ 5, 12, 19, 26, gdzie środy są 7, 14, 21, 28. Poniedziałek nie może wypaść 6 ani 7 dnia miesiąca, ponieważ wówczas w miesiącu takim będzie pięć śród, a tylko cztery poniedziałki. Zatem istnieją trzy dni tygodnia, które mogą rozpoczynać 31-dniowy miesiąc z jednakową ilością poniedziałków i śród.

- TAK, miesiąc może zacząć się w czwartek
- NIE, miesiąc ten nie może zacząć się we wtorek
- NIE, poniedziałek nie może wypaść 6. dnia miesiąca.

3. Odcinek AB jest jednocześnie: średnicą okręgu S o promieniu 1 oraz bokiem trójkąta równobocznego ABC. Załóżmy, że okrąg S przecina odcinek AC w punkcie D. Wówczas:

.... $|BD| = \sqrt{3}$

.... $|BD| > \sqrt{3}/2$

.... $|BD| = \sqrt{3}/2$

Kąt $\measuredangle ABD$ ma miarę $90°$. Zatem trójkąt ABC ma kąty $30 - 60 - 90$ stopni. Zatem BD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC o boku 2. Stąd $|BD| = \sqrt{3}$.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

4. W pewnym biurze gdy szef pisze list, wkłada go do koperty i kładzie na szczycie sterty dokumentów będących na biurku swojej sekretarki. Kiedy sekretarka ma wolną chwilę, bierze list znajdujący się na szczycie sterty i wysyła go dalej. Załóżmy, że szef napisał dzis pięć listów i przynosił je sekretarce w kopertach oznaczonych kolejno numerami 1, 2, 3, 4, 5. Który z poniższych układów może opisywać kolejność, w której sekretarka rozsyłała dalej napisane przez szefa listy?

.... 2 4 3 5 1

.... 4 5 2 3 1

.... 5 4 3 2 1

- TAK - w przypadku gdy sekretarka czeka na drugi list, przepisuje go, potem czeka na czwarty, przepisuje go, bierze trzeci, przepisuje go, potem czeka na piąty, przepisuje go i potem bierze pierwszy.
- NIE - niemożliwe. Sekretarka czeka na czwarty list, potem na piąty, a potem chcąc przepisać drugi list musiałaby najpierw przepisać trzeci. Zatem podany układ jest niemożliwy.
- TAK - oczywiste.

5. Na powierzchni jeziora znajdowała się piłka (w kształcie kuli o promieniu r). Jezioro zamarzło, a piłkę wyjęto (bez łamania lodu). Pozostała po niej dziura o maksymalnej głębokości 8 cm i maksymalnej szerokości 24 cm. Wówczas:

.... r wynosi $8\sqrt{3}$

.... r wynosi 16

.... r ma jedną z dwóch możliwych wartości.

Skoro kulę wyjęto bez łamania lodu, to środek tej kuli musiał znajdować się nad powierzchnią zamarzniętej tafli wody. Zatem z Twierdzenia Pitagorasa mamy $12^2 + (r-8)^2 = r^2$. Zatem $r = 13$..

- NIE,
- NIE,
- NIE.

6. Dany jest sześcian. Każdą z jego ścian malujemy jednym z kolorów: białym lub czarnym. Dwa kolorowania sześcianu, które są identyczne po obróceniu sześcianu uważamy za jedno i to samo kolorowanie. Ile jest możliwych kolorowań?

.... 10

.... 15

.... 20

Rozważamy kolejne przypadki, tzn. ustalamy ile ścian ma być kolorowanych na biało:

- 0 ścian - wówczas jest 1 kolorowanie (wszystko na czarno)
- 1 ściana - wówczas jest 1 kolorowanie
- 2 ściany - wówczas są 2 kolorowania: albo ściany mają wspólną krawędź, albo leżą naprzeciw siebie
- 3 ściany - wówczas są 2 kolorowania: albo ściany mają wspólny wierzchołek, albo nie
- 4 ściany - tak jakbyśmy rozpatrywali problem dla dwóch czarnych - 2 kolorowania
- 5 ścian - tak jakbyśmy rozpatrywali problem dla jednej czarnej - 1 kolorowanie
- 6 ścian - 1 kolorowanie

Zatem ostateczna odpowiedź to:

- TAK,
- NIE,
- NIE.

Test, dzień pierwszy, grupa starsza

1. Niech $a, b \in \mathbb{R}_+$ będą liczbami takimi, że każde z równań $x^2 + ax + 2b = 0$ oraz $x^2 + 2bx + a = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste. Wówczas najmniejsza możliwa wartość sumy $a + b$ wynosi:

.... więcej niż 3

.... więcej niż 5

.... więcej niż 7

Ta wartość wynosi 6. Ta wartość wynosi 6. Pierwsze rownanie ma pierwiastki rzeczywiste, o ile $a^2 \geqslant 8b$, zaś drugie – o ile $4b^2 \geqslant 4a$. Zatem mamy $(a/2)^2 \geqslant 2b$, czyli$(a/2)^4 \geqslant 4a$. Stąd $a^4 \geqslant 64a$ czyli $a^3 \geqslant 64$. Stąd minimalna wartość a to 4. Zatem maksymalna wartość b (na mocy drugiego warunku) to 2.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

2. Ile jest liczb całkowitych dodatnich n takich, że $n^2 - 19n + 99$ jest kwadratem liczby całkowitej?

.... więcej niż 5

.... mniej niż 3

.... dokładnie 5

Mamy $(n^2 - 19n + 99) = k^2 => (2n - 19)^2 + 35 = (2k)^2 => (2k + 2n - 19)(2k - 2n + 19) = 35$. Zatem mamy 4 rozwiazania: 1, 9, 10, 18.

- NIE,
- NIE,
- NIE.

3. Niech n będzie liczbą całkowitą taką, że istnieje dokładnie jedna liczba całkowita k taka, że $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$. Wówczas

.... $n > 100$,

.... $n > 110$,

.... $n > 120$.

Największa taka liczba to 112. Mnożąc „na krzyż” i upraszczając dostajemy nierówność $7/8 > k/n > 6/7$. Zatem szukamy najwiekszego n takiego, ze dokladnie jedna liczba k spelnia $48n < 56k < 49n$. Innymi słowy istnieje dokładnie jedna wielokrotność 56 w przedziale $(48n, 49n)$. Łatwo widzieć, że dla $n = 56 \cdot 2$ beda 3 takie wielokrotnosci. Co wiecej dwie z nich beda na koncach przedzialu, a wiec bedzie dokładnie jedno takie k. Dla $n > 112$ takich wielokrotnosci jest wiecej niz 1.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

4. Dwie muchy startują z tego samego punktu i lecą, w tym samym tempie, w następujących kierunkach. Mucha A leci 1 metr na północ, potem 1 metr na wschód, a później 1 metr w górę (lot jest w 3 wymiarach). Następnie powtarza ten układ. Mucha B leci natomiast 1 metr na południe, dalej 1 metr na zachód, a później powtarza ten sam układ. W którym kierunku leci każda z much A i B w momencie, gdy są one od siebie oddalone o 10 metrów?

.... A na wschód, B na zachód

.... A na północ, B na południe

.... A na północ, B na zachód

Niech (x, y, z) oznacza położenie muchy w przestrzeni trójwymiarowej. Pozycja muchy A w momencie zwrotu wynosi: (a, a, a), gdy leci na północ; $(a+1, a, a)$, gdy leci na wschod oraz $(a+1, a+1, a)$, gdy leci do gory. Natomiast pozycja B to $(-b, -b, 0)$, gdy leci na poludnie oraz $(-b-1, -b, 0)$, gdy leci na zachod. Suma współrzędnych (co do wartosci bezwzględnej) obydwu wspolrzędnych w A i B jest taka sama (bo lecą w tym samym tempie). Nietrudno widzieć, że gdy $A = (3, 3, 2)$ zas $B = (-4, -4, 0)$, to odleglosc wynosi troche ponad 10, zas w poprzednim stanie: $(3, 2, 2)$,$(-4, -3, 0)$ odleglosc ta jest mniejsza niz 10. Zatem gdy odleglosc wynosi 10 mucha A leci na wschod, zas B na zachod.

- TAK,
- NIE,
- NIE.

5. Powiemy, że liczba naturalna n jest p-bezpieczna, jeśli różni się, co do wartości bezwzględnej, od wszystkich wielokrotności liczby p o więcej niż 2. Na przykład zbiór liczb 10-bezpiecznych to $\{3, 4, 5, 6, 7, 13, \ldots\}$. Wówczas

.... istnieje dokładnie jedna liczba $n > 3$, która jest jednocześnie 5-bezpieczna i 8-bezpieczna,

.... istnieje dokładnie jedna liczba $n > 3$, która jest jednocześnie 6-bezpieczna i 8-bezpieczna,

.... istnieje dokładnie jedna liczba $n > 3$, która jest jednocześnie 7-bezpieczna i 8-bezpieczna.

- NIE, bo nie ma liczb 5-bezpiecznych.
- NIE, bo jako kontrprzykład służą liczby 51 i 99
- NIE, bo jako kontrprzykład służą liczby 59 i 115.

6. Ile liczb całkowitych z przedziału [1, 2013] można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych?

.... więcej niż 1006

.... więcej niż 1507

.... więcej niż 2008

W postaci różnicy kwadratów można przedstawić dowolną liczbę nieparzysta $2n + 1 = (n + 1 + n)(n + 1 - n) = (n + 1)^2 - n^2$ oraz każdą liczbę podzielną przez 4, postaci $4n = (2n)^2 - 0$. Gdyby liczby postaci $4n + 2$ były postaci $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$, to liczby n-m, n+n nie mogłyby być jednocześnie podzielne przez 2. A tymczasem dla dowolnych n, m liczby te mają tę samą parzystość. Zatem można w ten sposób przedstawić wszystkie liczby całkowite od 1 do 2013 poza liczbami 2, 6, ..., 2010, których jest 503. Zatem 2013 - 503 = 1510 liczb można przedstawić w postaci różnicy kwadratów.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

Test, dzień drugi, grupa młodsza

1. Zosia i Tosia umówiły się na kawę. Każda z nich zakupiło 120 ml czystej kawy w 150 ml kubeczku. Zosia wypiła 20 ml i dodała do reszty 20 ml mleka. Tosia natomiast dodała na początku 20 ml mleka, dobrze wymieszała i wypiła 20 ml tak uzyskanej kawy. Jaki jest w rezultacie stosunek ilości mleka w kawie Zosi do ilości mleka w kawie Tosi?

.... 6/7

.... 7/6

.... 1

Zosia miała ostatecznie 100ml czystej kawy i 20ml mleka, a więc u niej stosunek ilości mleka do kawy to $20/120 = 1/6$. Tosia na początku ma 20 ml mleka w 140 ml kawy. Skoro dobrze wymieszała napój, to stosunek się nie zmienia. Zatem to dalej $20/140 = 1/7$. Zatem odpowiedź to 7/6.

- NIE,
- TAK,
- NIE.

2. Niech x, y, z, n będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas układ równań o niewiadomych x, y, z

$$\begin{cases} nx + y = 1 \\ ny + z = 1 \\ x + nz = 1 \end{cases}$$

.... może nie mieć rozwiązań, dla pewnego n,

.... ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie zależne od n,

.... dla pewnych n ma nieskończenie wiele rozwiązań.

- TAK, po dodaniu równań stronami dla n = - 1 dostajemy równanie sprzeczne,
- NIE, zgodnie z punktem pierwszym,
- NIE, jeśli $n \neq -1$, to rozwiązanie jest jedno i można je wyliczyć.

3. Hipoteza Goldbacha mówi, że każda każda liczba parzysta większa niż 7 jest sumą dwóch różnych liczb pierwszych. Jest ona prawdziwa m.in. dla liczby 126. Jaka jest największa możliwa różnica dwóch liczb pierwszych (dodatnich), których suma to 126?

.... większa niż 40

.... większa niż 70

.... większa niż 100

Różnica ta to 100, a realizują ją liczby 113 oraz 13. Wiadomo, że jeden ze składników musi być nie większy niż 126. Jeśli składnik jest większy od 113, to drugi składnik jest mniejszy niż 13, a więc równy: 3, 5, 7 lub 11. W każdym z tych przypadków różnica nie jest jednak liczbą pierwszą: $126 - 3 = 123 = 3 \cdot 41$, $126 - 5 = 121 = 11 \cdot 11$, $126 - 7 = 119 = 7 \cdot 17$, $126 - 11 = 115 = 5 \cdot 23$.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

4. Zbiór $\{18, 19, 20, 21, 22\}$ ma dwie własności: składa się z kolejnych liczb naturalnych oraz suma jego elementów równa jest 100. Ile podzbiorów liczb naturalnych ma te dwie własności?

.... dokładnie jeden

.... więcej niż jeden

.... więcej niż dwa

Są dokładnie dwa takie zbiory. Drugim jest $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Dlaczego nie ma więcej? Łatwo widzieć, że jeśli taki zbiór ma n elementów, to pierwszy z nich jest postaci $(100 - 1 - 2 - 3 - ... - (n-1))/n$. Dla $n = 2$ dostajemy $99/2$, dla $n = 3$ dostajemy $97/3$, dla $n = 4$ dostajemy $94/4$, dla $n = 5$ mamy $90/5 = 18$, dla $n = 6$ mamy $85/6$, dla $n = 7$ mamy $79/7$, dla $n = 8$ mamy $72/8 = 9$. Dalej dla $n = 9$ mamy $64/9$, dla $n = 10$ mamy $55/10$ itd.

- NIE,
- TAK,
- NIE.

5. Wartość wyrażenia $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ równa jest

.... mniej niż 1

.... dokładnie 2

.... więcej niż 2

Równa jest dokładnie 5. Wystarczy wyciągnąć niewymierności z mianowników i otrzymamy wyrażenie postaci:

$$(\sqrt{9} + \sqrt{8}) - (\sqrt{8} + \sqrt{7}) + (\sqrt{7} + \sqrt{6}) - (\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{5} + \sqrt{4}) = 3 + 2 = 5.$$

- NIE,
- NIE,
- TAK.

6. Ile dodatnich liczb całkowitych n ma tę własność, że n^2 jest podzielna przez 24 oraz $n^2 < 10^6$?

.... więcej niż 50

.... więcej niż 100

.... mniej niż 80

Jest ich dokładnie 83. Skoro n^2 jest podzielna przez $24 = 2^3 \cdot 3$, to znaczy, że samo n jest podzielne przez 12. Pytamy ile jest wielokrotności liczby 12 mniejszych od 1000? Skoro $83 \cdot 12 = 996$, to jest ich dokładnie 83.

- TAK,
- NIE,
- NIE.

Test, dzień drugi, grupa starsza

1. Współrzędne wierzchołków A oraz C sześciokąta foremnego $ABCDEF$ wynoszą odpowiednio $(0,0)$ oraz $(7,1)$. Znajdź pole tego sześciokąta.

.... $20\sqrt{3}$

.... $25\sqrt{3}$

.... $50\sqrt{3}$

Pole szukanego sześciokąta jest dwukrotnie większe niż pole trójkąta równobocznego o boku długości $\sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

- NIE,
- TAK,
- NIE.

2. Niech $n = 69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1$. Wówczas:

.... liczba n ma nie więcej niż 5 dzielników.

.... liczba n ma nie więcej niż 50 dzielników.

.... liczba n ma nie więcej niż 100 dzielników.

Korzystając ze wzoru $(x+1)^5$ widzimy, że $n = 70^5 = 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5$. Zatem liczba dzielników to $6^3 = 216$.

- NIE,
- NIE,
- NIE.

3. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Wówczas reszta z dzielenia liczby $p^2 - 1$ przez 24:

.... jest zawsze równa 0,

.... jest równa 0 dla nieskończenie wielu liczb pierwszych,

.... jest równa 0 tylko dla skończenie wielu liczb pierwszych.

- TAK, bo każda liczba pierwsza większa niż 5 jest postaci $6n+1$ lub $6n-1$. Zatem $(6n+1)^2-1 = 36n^2 + 12n = 12n(3n+1)$. Jeśli n jest parzysta, to 12n jest podzielne przez 24, a jeśli n jest nieparzysta, to $3n+1$ jest podzielne przez 2. Drugi przypadek rozważa się analogicznie.
- TAK, wynika z punktu pierwszego,
- NIE, bo przeczy punktowi pierwszemu.

4. Załóżmy, że a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $a+b+c = 2013$ oraz $a!b!c! = m \cdot 10^n$, gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi i m nie jest podzielna przez 10. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość liczby n?

.... więcej niż 450

.... więcej niż 470

.... mniej niż 490

Szukamy potęg 10 w rozkładzie $a!b!c!$, a więc potrzebujemy określić minimalną potęg 5, bo 2 występuje częściej niż 5 w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a!b!c!$. Liczba czynnikow 5 w $a!$ to $[a/5]+[a/5^2]+[a/5^3]+[a/5^4]$. Wiadomo, że $[x]+[y]+[z] \geqslant [x+y+z]-2$. Stad minimalną wartość n szacować można z góry przez

$$[2013/5]+[2013/25]+[2013/125]+[2013/625]-8 = 402+80+16+3-8 = 493$$

. Ta liczba moze byc osiagnieta biorac $a = 624, b = 624, c = 759$.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

5. Powiemy, że liczba n jest ogonem silni jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia m taka, że rozwinięcie dziesiętne $m!$ kończy się dokładnie n zerami. Jak wiele liczb całkowitych dodatnich mniejszych niż 2013 nie jest ogonami silni?

.... mniej niż 300

.... mniej niż 400

.... mniej niż 500

Zauważmy, że liczby nie bedace ogonem silni powstaja wtedy, gdy pojawia sie wielokrotnosc $5^2, 5^3, ...$ Istotnie 24! ma cztery zera, ale 25! ma szesc zer. Jesli dochodzi liczba niepodzielna przez 25, to liczba zer rosnie o nie wiecej niz 1. Musimy wiec policzyc liczbe wielokrotnosci $25, 125, 625, 3125$ itd, ktore sa mniejsze niz x, gdzie $x!$ ma 2013 zer. Liczba x ma te wlasnosc, ze jest najmniejsza taka, ze $[x/5]+[x/25]+[x/125]+[x/625]+[x/3125] = 2013$. Równanie $625x+125x+25x+5x+x = 2013 \cdot 3125$ ma rozwiązanie $x = 8065$. Co więcej $1613+322+64+12+2 = 2013$. Zatem ilosc wielokrotnosci 25 mniejszych od 8065 to 322, ilosc wielokrotnosci 125 to 64, ilosc wielokrotnosci 625 to 12, a ilosc wielokrotnosci 3125 to 2. Szukana liczba „przeskokow” wynosi zatem 400. Stąd 400 liczb mniejszych niż 2013 nie jest ogonami silni.

- NIE,
- NIE,
- TAK.

6. Załóżmy, że a, b, c oraz d są liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $a^5 = b^4$, $c^3 = d^2$ oraz $c - a = 19$. Wówczas $d - b$ równe jest:

.... więcej niż 100

.... więcej niż 300

.... więcej niż 500

Ta liczba to 757. Istotnie, skoro $a^5 = b^4$, to $a = e^4$ oraz $b = e^5$, dla pewnej liczby całkowitej e. Podobnie $c = f^2$ praz $d = f^3$, dla pewnej liczby całkowitej f. Zatem mając $f^2 - e^4$ mamy wyznaczyć $f^3 - e^5$. Ale $f^2 - e^4 = (f + e^2)(f - e^2) = 19$. Zatem $f - e^2 = 1$ oraz $f + e^2 = 19$, czyli $e = 3, f = 10$. Zatem $f^3 - e^5 = 1000 - 243 = 757$.

- TAK,
- TAK,
- TAK.

Test, dzień trzeci, grupa młodsza

1. Liczba sześciocyfrowa powstaje przez powtórzenie zapisu dziesiętnego liczby trzycyfrowej, dla przykładu 691691. Każda liczba tej postaci jest:

.... podzielna przez 77

.... podzielna przez 91

.... podzielna przez 143

Ta liczba jest podzielna przez $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

- TAK,
- TAK,
- TAK.

2. Dane są dwa czworościany A_1, A_2, przy czym A_1 leży wewnątrz A_2. Wynika stąd, że:

.... objętość A_1 jest mniejsza niż objętość A_2.

.... sfera opisana na A_1 jest zawarta wewnątrz sfery opisanej na A_2.

.... suma krawędzi A_1 jest mniejsza niż suma krawędzi A_2.

- TAK, to jest jasne.
- NIE, łatwo wskazać kontrprzykład gdy A_1, A_2 mają wspólną ścianę.
- NIE, załóżmy, że A_2 ma w postawie trójkąt równoboczny ABC o boku 1, a krawędzie boczne mają długość 1000. Wierzchołki A_1 wybieram tak, aby dwa leżały w odległości nie większej niż 1 od podstawy ABC czworościany A_2, zaś pozostałe dwa leżą w odległości co najmniej 999. Łatwo sprawdzić, że suma krawędzi tak uzyskanego A_1 jest większa niż 3003.

3. Bierzemy dwie liczby pierwsze $p < q$ większe od 2 i rozważamy różnicę pomiędzy iloczynem, a sumą tych liczb. Może ona wówczas wynosić

.... 21

.... 60

.... 119

- NIE, $pq - p - q = (p-1)(q-1) - 1$. Zatem $(p-1)(q-1) = 22$. Zatem $p = 2, q = 23$, co odpada ze względu na założenie zadania, lub $p = 3, q = 12$, co odpada, bo 12 nie jest liczbą pierwszą. Podobnie znajdujemy odpowiedź pozytywną w punkcie c.
- NIE, iloczyn nieparzystych liczb pierwszych jest nieparzysty, a suma – parzysta. Zatem różnica musi być nieparzysta.
- TAK, dla $p = 11, q = 13$.

4. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5$ będą liczbami pierwszymi takimi, że

$$X = p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4.$$

Wówczas:

.... ciąg ten musi zawierać liczbę 5

.... X jest podzielne przez 5

.... najmniejsza możliwa wartość p_5 to 29.

- NIE, przykładem jest ciąg 7, 37, 67, 97, 127.
- NIE, przykładem jest ciąg 5, 11, 17, 23, 29. (ale jeśli miałby nie zawierać 5, to odpowiedź jest TAK)
- TAK, ciąg albo zawiera 5, albo jego różnica jest podzielna przez 5. Można też sprawdzić bezpośrednio.

5. Istnieje taki graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa:

.... 3^{100}

.... 5^{100}

.... 100001

Liczba krawędzi graniastosłupa jest podzielna przez 3. N

- TAK, każdy graniastosłup o podstawie 3^{99}-kąta,
- NIE, bo 5^{100} nie dzieli się przez 3,
- NIE, bo 100001 nie dzieli się przez 3.

6. Dodatnie liczby a, b spełniają warunek $a + b = 1$. Wynika z tego, że:

.... $a^2 + b^2 < 1$,

.... $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$,

.... $ab < 1$.

- TAK. Zauważmy, że $(a + b)^2 = 1$, czyli $a^2 + 2ab + b^2 = 1$, zatem $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$. Ponieważ liczby a i b są dodatnie, to $2ab > 0$. Zatem $a^2 + b^2 < 1$.
- NIE. Przyjmując $a = b = 1/2$ dostajemy $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$.
- TAK. Skoro $a + b = 1$ oraz liczby a, b są dodatnie, to $a < 1$ oraz $b < 1$. Obie strony ostatnich nierówności są dodatnie, zatem mnożąc stronami dostajemy $ab < 1$.

Test, dzień trzeci, grupa starsza

1. Niech $d = a^2 + b^2 + c^2$, gdzie a, b są kolejnymi liczbami całkowitymi, zaś $c = ab$. Wówczas

.... $\sqrt{d}$ jest zawsze liczbą całkowitą nieparzystą

.... $\sqrt{d}$ jest zawsze liczbą całkowitą parzystą

.... $\sqrt{d}$ jest zawsze liczbą całkowitą

Jeśli a = b-1, to $\sqrt{d} = b(b-1) + 1$.

- TAK,
- NIE,
- TAK.

2. Na okręgu umieszczono 2000 punktów. Oznaczmy jeden z nich przez „1". Od tego punktu, odliczamy dwa w kierunku wskazówek zegara i oznaczamy uzyskany punkt przez „2". Następnie odliczamy kolejne trzy punkty w kierunku wskazówek zegara i oznaczamy tak otrzymany punkt przez „3". Kontynuujemy w ten sposób aż pewien punkt X zostanie oznaczony jako „1993". Niektóre z początkowych 2000 punktów zostaną oznaczone wielokrotnie. Jaka jest najmniejsza liczba, którą oznaczono punkt X?

.... ta liczba jest większa niż 100

.... ta liczba jest wieksza niż 110

.... ta liczba jest większa niż 1992.

Oznaczenie 1993 pojawi sie w 1/2(1993)(1994)- miejscu mod 2000 (od początkowego „1"). Numer n pojawi sie zatem w punkcie X o ile $1/2(n)(n+1) = 1/2(1993)(1994) mod 2000$. Upraszczajac mamy $(1993)(1994) - n(n+1) = (1993-n)(1994+n) = 0 mod(2000)$. Zatem jedna z liczb $1993 - n$ lub $1994 + n$ jest nieparzysta oraz każda z nich musi byc wielokrotnoscia 125 lub 16. Aby $1993 - n$ bylo wielokrotnoscia 125 i aby $1994 + n$ bylo wielokrotnoscia 16 musimy miec $n = 118 (mod 125)$ oraz $n = 6 (mod 16)$. Najmniejsze n, ktore pasuje to 118. Podobnie odwrotnie, jesli $1993 - n$ ma byc wielokrotnoscia 16, zas $1994 + n$ ma byc wielokrotnoscia 125, wtedy $n = 9 (mod 16)$ oraz $n = 6 (mod 125)$. Najmniejsze n w tym przypadku jest zatem wieksze niz 118, wiec MIN - 118.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

3. Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, zaś długości boków tego trójkąta wynoszą $4, 5, x$. Wówczas:

.... x może być równy $\sqrt{21}$,

.... x może być równy $2 + \sqrt{13}$,

.... x może być równy $2+\sqrt{21}$.

Rozwiązanie. Kąty w trójkątach tworzą ciąg arytmetyczny, a zatem jeden z nich to $60°$. Są zatem trzy przypadki. Albo bok długości 4 jest naprzeciw kąta o mierze$60°$ i z tw. cosinusów mamy $x^2-5x+9=0$, albo bok długości 5 jest naprzeciw kąta o mierze $60°$ i mamy równanie x^2-4x-9, które ma jedno dodatnie rozwiązanie. Jesli bok długości x jest naprzeciw $60°$, to mamy rownanie $x^2=21$.

- TAK,
- TAK,
- NIE.

4. Trójkąt ABC wpisany jest w półkole, którego średnicę stanowi odcinek AB. Wówczas:

.... $|AC|+|BC| \geqslant |AB|$,

.... $|AC|+|BC| \geqslant |AB|\sqrt{2}$,

.... $|AC|+|BC| = |AB|^2$.

Zauważmy, że każdy taki trójkąt musi być prostokątny, a największy obwód ma trójkąt prostokątny równoramienny, w którym $|AC|+|BC|=|AB|\sqrt{2}$.

- TAK,
- NIE,
- NIE.

5. Z 18225000 kostek rozmiaru $1\times1\times1$ stworzono prostopadłościan rozmiaru $150\times324\times375$. Przez jak wiele wnętrz kostek $1\times1\times1$ przechodzi główna przekątna prostopadłościanu (przez wnętrze mamy na myśli punkt nie należący do żadnej ściany kostki).

.... 849

.... 768

.... 765

Stosujemy zasadę włączeń i wyłączeń: 768 = 150 + 324 + 375 - NWD(150,324) - NWD(150,375) - NWD(324,375) + NWD(150, 324, 375).

- NIE,
- TAK,
- NIE.

6. Okręgi S_1, S_2, S_3 o promieniach 1, 2, 3 są parami styczne zewnętrznie. Jakie jest pole trójkąta powstającego z trzech punktów styczności odpowiednich par okręgów?

.... 3/5

.... 4/5

.... 4/3

Odpowiedź to 6/5. Trójkąt ABC utworzony przez srodki okręgów ma boki $3, 4, 5$ i pole 6. NiechD, E, F leżą na odpowiednio na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC. Znajdźmy pola trójkątów ADE, DFB, EFC. Jest jasne, że ADE to trójkąt o bokach $1, 1, \sqrt{2}$, więc jego pole to $1/2$. Rozważmy wysokości poprowadzone z D oraz F do BC. Dostajemy trojkaty prostokątne podobne do ABC. Zatem możemy policzyć wysokości DFB oraz EFC. Są to $8/5$ oraz $9/5$. Zatem pole DEF równe jest $6 - 1/2 - 27/10 - 16/10 = 6/5$.

- NIE,
- NIE,
- NIE.